ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ
ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΜΠΗΣ (Σ.Κ.)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Ο ορισμός της κυρτής και κοίλης συνάρτησης, είναι αν η f ′ είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ, ή αν η f ′ είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ αντίστοιχα, και όχι αν f ′′ > 0 ή f ′′ < 0.
2) Αν η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f έχει Σ.Κ. στο $x=x_0$, και ισχύει $f'(x_0)=0$, τότε λέμε ότι έχουμε ένα Σ.Κ. με οριζόντια εφαπτομένη.
3) Αν $P(x_0,f(x_0))$ είναι ένα Σ.Κ., τότε $f''(x_0)=0$, ή δεν υπάρχει η f′′ στο x_0.
4) Στις πανελλήνιες εξετάσεις, η κυρτότητα είναι είτε θέμα θεωρίας, (ορισμός ή σε ερώτηση σωστό-λάθος αν η γραφική παράσταση της f είναι πάνω ή κάτω από την εφαπτομένη της σε τυχαίο σημείο της), είτε ερώτημα κάποιας γενικότερης άσκησης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να βρείτε τα Σ.Κ. της συνάρτησης $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$.
2) Να βρείτε τα Σ.Κ. της συνάρτησης $f(x)=x+\eta\mu x$.
3) Να βρείτε τα Σ.Κ. της συνάρτησης $f(x)=x^2e^x$.
4) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ έχει τρία Σ.Κ. τα οποία είναι συνευθειακά.
5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Να υπολογίσετε τα α, β, γ∈R, ώστε η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f να διέρχεται από το σημείο Α(2,7), να έχει ελάχιστο στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$ και να έχει Σ.Κ. στο σημείο της Α(3,f(3)).
6) Να δείξετε ότι η συνάρτηση
$$f(x)= x^4-2\lambda x^3+6(\lambda^2-2\lambda+3)x^2+x+2008,\ x\in R,$$
δεν έχει Σ.Κ.
7) Να βρεθεί πολυωνυμική συνάρτηση 3^ου^ βαθμού που ικανοποιεί τις συνθήκες:
   - **i)** έχει παράγοντα το x+1,
   - **ii)** έχει Σ.Κ. στο σημείο της με τετμημένη x=-2,
   - **iii)** η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη x=-2 έχει εξίσωση 2y-6x=5.
8) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2$ με $\alpha,\beta\neq 0$, έχει δυο ακρότατα και ένα Σ.Κ. τα οποία είναι συνευθειακά και μάλιστα το Σ.Κ. διχοτομεί το τμήμα που ορίζουν τα ακρότατα.
9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-\lambda x^2+x-1$. Να υπολογίσετε το λ∈R, ώστε η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο Σ.Κ. της.
10) Να δείξετε ότι αν μια άρτια συνάρτηση f: R→R στρέφει τα Κ.Α. στο [0,+∞), τότε στρέφει επίσης τα Κ.Α. στο (-∞,0].
11) Να δείξετε ότι η συνάρτηση
$$f(x)=x^3-6x^2+11x+9,\ x\in R,$$
έχει το Σ.Κ. της και κέντρο συμμετρίας.
12) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ στρέφει τα Κ.Κ. στο (0,π/2).
13) Έστω οι συναρτήσεις f,g:R→R δυο φορές παραγωγίσιμες στο R και στρέφουν τα Κ.Κ. στο R. Αν f′(x)>0 για κάθε x∈R, να δείξετε ότι η σύνθεσή τους f∘g στρέφει τα Κ.Κ. στο R.
14) Δίνεται η συνάρτηση f: Δ→R, συνεχής στο διάστημα Δ. Να δείξετε ότι:
    - **i)** αν η f στρέφει τα Κ.Α. στο Δ, τότε για κάθε $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1\neq x_2$ ισχύει $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$
    - **ii)** αν η f στρέφει τα Κ.Κ. στο Δ, τότε για κάθε $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1\neq x_2$ ισχύει $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

    Να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία των παραπάνω σχέσεων.

    Εφαρμογή:
    - **i)** Να δείξετε ότι για κάθε α,β∈[0,π/2] ισχύει $\dfrac{\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta}{2}\le\eta\mu\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$,
    - **ii)** Να δείξετε ότι για κάθε α,β∈R ισχύει $\dfrac{e^\alpha+e^\beta}{2}\ge e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ

15) Να υπολογίστε το α∈R, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\left(\alpha-\dfrac{2}{3}\right)x^3-\left(\alpha+\dfrac{1}{2}\right)x^2-10x+7$ να παρουσιάζει Σ.Κ. στο x=3/2. Μετά για την τιμή του α που βρήκατε, να σχηματίσετε τον πίνακα μεταβολών. (Α δέσμη 1990)
16) Να δείξετε ότι η συνάρτηση
$$f(x)=\frac{x^4}{3}+\frac{2\alpha x^3}{3}+\left(\alpha^2-2\alpha+\frac{5}{2}\right)x^2+(\alpha^3+7)x-5\alpha^2$$
δεν παρουσιάζει Σ.Κ. για καμιά τιμή του α∈R. (Α δέσμη 1991)
17) (Θέμα 4^ον^ 2003) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ′ ένα διάστημα [α,β] που έχει συ-νεχή δεύτερη παράγωγο στο (α,β). Αν ισχύει f(α)=f(β)=0 και υπάρχουν αριθμοί

$\gamma\in(\alpha,\beta)$, $\delta\in(\alpha,\beta)$, έτσι ώστε $f(\gamma)\cdot f(\delta)<0$, να αποδείξε-τε ότι:

α. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα (α,β). Μονάδες 8

β. Υπάρχουν σημεία ξ_1, $\xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1)<0$ και $f''(\xi_2)>0$. Μονάδες 9

γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f. Μονάδες 8

18) (ΘΕΜΑ 2ο 2004) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2\ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα. Μονάδες 10

β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής. Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το σύνολο τι μών της f. Μονάδες 7

19) (Θέμα 3ον 2007) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=x^3-3x-2\eta\mu^2\theta$$

όπου $\theta\in R$ μια σταθερά με $\theta\neq\kappa\pi+{}^{\pi}/_{2}$.

i) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής Μονάδες 7

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες στο πεδίο ορισμού της. Μονάδες 8

iii) Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f, να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ και $\Gamma(x_3,f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$. Μονάδες 3

20) (Θέμα 3ο 2009) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\alpha^x-\ln(x+1),\ x>-1$$

όπου α σταθερός πραγματικός με $0<\alpha\neq1$.

A) Αν ισχύει $f(x)\geq1$ για κάθε $x>-1$, να αποδείξετε ότι $\alpha=e$. Μονάδες 8

B) Για $\alpha=e$,

i) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή. Μονάδες 5

ii) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι ↘ στο διάστημα $(-1,0]$ και ↗ στο διάστημα $[0,+\infty)$ Μονάδες 6

iii) Αν $\beta,\gamma\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(\beta)-1}{x-1}+\dfrac{f(\gamma)-1}{x-2}=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,2)$. Μονάδες 6

21) (Θέμα Γ 2010) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=2x+\ln(x^2+1),\ x\in R.$$

Γ1. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση f. Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2(x^2-3x+2)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right].$$ Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δυο σημεία καμπής. Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι η f έχει δυο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτομένες της γραφικής της παράστασης στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα ψψ΄. Μονάδες 6

22) (Θέμα Γ 2011) Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$, δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, με $f'(0)=f(0)=0$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$e^x\big(f'(x)+f''(x)-1\big)=f'(x)+xf''(x)$ για κάθε $x\in R$.

A. Να δείξετε ότι $f(x)=\ln(e^x-x)$, $x\in R$. Μονάδες 8

B. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα Μονάδες 3

C. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δυο σημεία καμπής. Μονάδες 7

D. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x-x)=\sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Μονάδες 7

23) Zxzxcc

24) zcxvzvzxzx