

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ  
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ**

1. Μια συνάρτηση είναι πλήρως ορισμένη, αν δίνεται ο τύπος της αντιστοίχισης και το πεδίο ορισμού της. Πχ αν  $f(x)=3x^2-3, x \in [3,5)$ , το πεδίο ορισμού της είναι το  $A_f=[3,5)$ , Αν

$$f(x) = \begin{cases} 1-2x, & x \leq 1 \\ x^2-x, & x > 3 \end{cases}$$

, το πεδίο ορισμού της είναι το  $A_f=(-\infty, 1] \cup (3, +\infty)$ , κλπ. Όταν δεν δίνεται το πεδίο ορισμού, τότε ως πεδίο ορισμού θεωρούμε το ευρύτερο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ , στο οποίο έχει νόημα ο τύπος της. Μερικές βασικές περιπτώσεις είναι:

(Στα παρακάτω  $P(x), Q(x)$  είναι πολυώνυμα του  $x$ ).

- i. Πολυωνυμική συνάρτηση  $f(x)=P(x)$ . Τότε  $A_f=\mathbb{R}$ .
- ii. Ρητή συνάρτηση  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ . Τότε  $A_f=\{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$ .
- iii. Άρρητη συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{P(x)}$ . Τότε  $A_f=\{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\}$ .
- iv. Λογαριθμική συνάρτηση  $f(x) = \log_{P(x)} Q(x)$ . Τότε  $A_f=\{x \in \mathbb{R} / 1 \neq P(x) > 0 \text{ και } Q(x) > 0\}$ .
- v. Εκθετική συνάρτηση  $f(x) = P(x)^{Q(x)}$ . Τότε  $A_f=\{x \in \mathbb{R} / 1 \neq P(x) > 0 \text{ ή } (P(x) < 0 \text{ και } Q(x) \in \mathbb{Z}) \text{ ή } (P(x) = 0 \text{ και } Q(x) > 0)\}$ .
- vi.  $f(x)=\eta\mu P(x)$  και  $g(x)=\sigma\upsilon\nu P(x)$ . Τότε  $A_f=\mathbb{R}$ .
- vii.  $f(x)=\epsilon\varphi P(x)$ . Τότε  $A_f=\{x \in \mathbb{R} / P(x) \neq \kappa\pi + \pi/2, \kappa \in \mathbb{Z}\}$ .
- viii.  $f(x)=\sigma\varphi P(x)$ . Τότε  $A_f=\{x \in \mathbb{R} / P(x) \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}\}$ .
- ix. συνδυασμοί των παραπάνω.

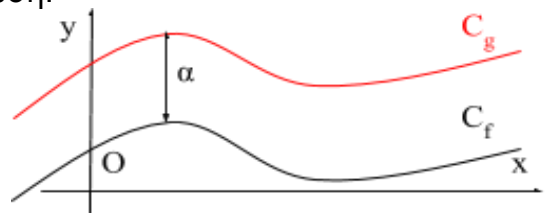
2. Η γραφική παράσταση  $C_f$  της  $f$  τέμνει τον άξονα των  $y'Oy$ , μόνο όταν  $0 \in A_f$ . Το σημείο τομής είναι το  $A(0, f(0))$ . Η γραφική παράσταση  $C_f$  της  $f$  τέμνει τον άξονα των  $x'Ox$  στα σημεία που οι τετμημένες τους είναι λύση της εξίσωσης  $f(x)=0$ .

3. Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων δυο συναρτήσεων  $f$  και  $g$  – αν υπάρχουν – έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης  $f(x)=g(x)$ . Για να βρούμε την τεταγμένη ενός τέτοιου σημείου, βάζουμε την τετμημένη του στον τύπο της  $f$  ή της  $g$  (το ίδιο είναι).

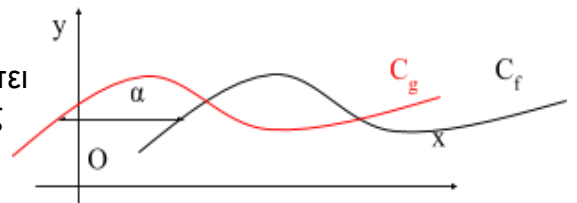
4. Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση  $C_f$  της  $f$  είναι πάνω (κάτω) από τον άξονα των  $x'Ox$ , λύνουμε την ανίσωση  $f(x) > 0$  ( $f(x) < 0$ ).

5. Για να βρούμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης που ορίζεται με κλάδους ή που το πεδίο ορισμού της είναι ένωση διαστημάτων  $A_f=A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ , βρίσκουμε ξεχωριστά το σύνολο τιμών κάθε κλάδου ή διαστήματος, και παίρνουμε ένωση.  $f(A_f) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup \dots \cup f(A_n)$ .

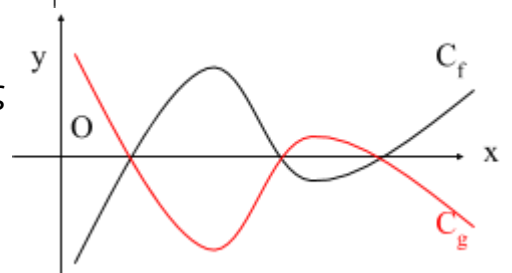
6. Αν  $g(x)=f(x)+\alpha, \alpha > 0$ , ( $g(x)=f(x)-\alpha$ ) τότε η  $C_g$  προκύπτει με κατακόρυφη μετατόπιση της  $C_f$  κατά  $\alpha$  μονάδες προς τα πάνω (κάτω).



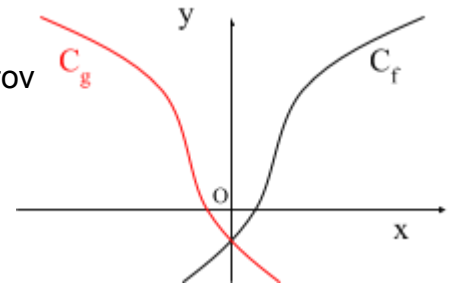
7. Αν  $g(x)=f(x+\alpha), \alpha > 0$ , ( $g(x)=f(x-\alpha)$ ) τότε η  $C_g$  προκύπτει με οριζόντια μετατόπιση της  $C_f$  κατά  $\alpha$  μονάδες προς τα αριστερά (δεξιά).



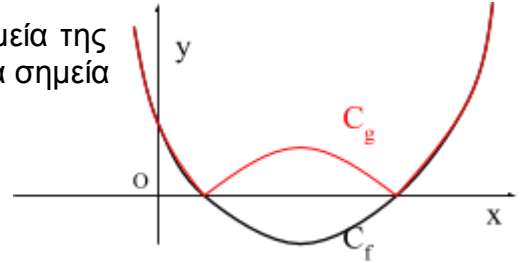
8. Αν  $g(x) = -f(x)$ , τότε η  $C_g$  είναι συμμετρική της  $C_f$  ως προς τον άξονα  $x'Ox$ .



9. Αν  $g(x)=f(-x)$ , τότε η  $C_g$  είναι συμμετρική της  $C_f$  ως προς τον άξονα  $y'Oy$ .



10. Αν  $g(x)=|f(x)|$ , τότε η  $C_g$  ταυτίζεται με την  $C_f$  στα σημεία της  $C_f$  με μη αρνητική τεταγμένη και ταυτίζεται με την  $C_{-f}$  στα σημεία της  $C_f$  με αρνητική τεταγμένη.



**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

1. Να γράψετε με μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων τα σύνολα:

i.  $\{x \in \mathbb{R} / |2x-1| < 3\}$ .

ii.  $\{x \in \mathbb{R} / \frac{x+3}{2x} < 1\}$ .

iii.  $\{x \in \mathbb{R} / -x^2+6x-8 \geq 0 < 3\}$ .

iv.  $\{x \in \mathbb{R} / \frac{x+2}{x-3} < 2\}$ .

v.  $\{x \in \mathbb{R} / (x^2-4x+4)(x-1) \geq 0\}$ .

vi.  $\{x \in \mathbb{R} / x^3-3x+2 \geq 0\}$ .

2. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

i.  $f(x) = \frac{x-1}{-x^2+3x-2}$

ii.  $f(x) = \sqrt{x^3-4x}$

iii.  $f(x) = \sqrt[3]{3-|x-1|}$

iv.  $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$

v.  $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$

vi.  $f(x) = \ln(x^2-7x+10)$

vii.  $f(x) = 2^{\sqrt{x^2-4x}}$

viii.  $f(x) = \frac{2}{\eta\mu x - 1}$

ix.  $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

x.  $f(x) = \sqrt{5-\sqrt{x-6}}$

xi.  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x^2+4x+4}}$

vii.  $\{x \in \mathbb{R} / x^2 \geq 4\}$ .

viii.  $\{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{x^2} \geq 3\}$ .

ix.  $\{x \in \mathbb{R} / |x-2| \geq 3\}$ .

x.  $\{x \in \mathbb{R} / (x^2+x+1)(x-2) \leq 0\}$ .

xii.  $f(x) = \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{\sqrt{x}}$

xiii.  $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2}-x)$

xiv.  $f(x) = x - \sqrt{\ln^2 x - \ln x}$

xv.  $f(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$

xvi.  $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$

xvii.  $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$

xviii.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-\ln x}}$

xix.  $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1}$

xx.  $f(x) = \sqrt{e^{x+1}-e^2}$

xxi.  $f(x) = \sqrt{e^{2x}-3e^x+2}$

xxii.  $f(x) = \ln(e^x+1)$

3. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

i.  $f(x) = \begin{cases} 1-2x, & x \leq 1 \\ x^2-x, & x > 1 \end{cases}$

ii.  $f(x) = \begin{cases} x-3, & x \leq -2 \\ 3x-7, & -2 < x \leq 1 \end{cases}$

iii.  $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ x-1, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{5x}{\sqrt{x+3}}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$

iv.  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = \text{ρητός} \\ 1, & \text{αν } x = \text{άρρητος} \end{cases}$

v.  $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-3}, & \text{αν } x \neq 3 \\ 4, & \text{αν } x = 3 \end{cases}$

vi.  $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{αν } x < 1 \\ 5, & \text{αν } x = 1 \\ -2x+3, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

4. Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές τις συναρτήσεις:

i.  $f(x) = |3-2x|$

ii.  $f(x) = 2|x-1| + 3$

iii.  $f(x) = \frac{2x-4}{|x-2|}$

iv.  $f(x) = \frac{|x-1| + |x+1|}{2}$

v.  $f(x) = 5x - |x+4| + 2|x-1|$

vi.  $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$

vii.  $f(x) = \frac{|x^2 + 1| - x^2}{x-2}$

viii.  $f(x) = \frac{|1 - \eta\mu x|}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

ix.  $f(x) = \frac{|x^2 - 3x| + x - 3}{x^2 - 9}$

5. Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων με τους άξονες:

i.  $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x - 4}$

ii.  $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x - 1}$

iii.  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

iv.  $f(x) = x + \frac{2}{x}$

v.  $f(x) = 1 - \eta\mu x$

vi.  $f(x) = \frac{4}{x - 1}$

vii.  $f(x) = \frac{2\eta\mu x - 1}{x^2 + 1}$

viii.  $f(x) = \sqrt{x - 6}$

ix.  $f(x) = \ln(x^2 - 6x + 9)$

x.  $f(x) = \sqrt{2} + 2\sigma\upsilon\nu x$

6. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i.  $f(x) = -x^2 + 6x - 8$  και  $g(x) = \frac{4-x}{x}$

ii.  $f(x) = (x-1)^2$  και  $g(x) = \frac{2}{x}$

iii.  $f(x) = x^3$  και  $g(x) = x$

iv.  $f(x) = 3^{x^2 - 5x + 6}$  και  $g(x) = 1$

v.  $f(x) = \eta\mu x$  και  $g(x) = 2$

vi.  $f(x) = \ln(x+2)$  και  $g(x) = 0$

vii.  $f(x) = 8x^4 - 28x^3 - 6$  και  $g(x) = -22x^2 - 7x$

viii.  $f(x) = \sqrt{3x + 4}$  και  $g(x) = 7 - \sqrt{x + 5}$

7. Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι

α) πάνω από τον άξονα των x'Οx,

β) κάτω από τον άξονα των x'Οx,

στις παρακάτω περιπτώσεις:

i.  $f(x) = -3x^2 + 10x - 3$

ii.  $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

iii.  $f(x) = e^{x^2 - 3x + 2} - 1$

- iv.  $f(x)=\ln(x+3)$
- v.  $f(x)=\ln x+3$
- vi.  $f(x)=2^x-10$ .

$$f(x) = \log_{\frac{3}{4}}(x^2 + 2x - 1)$$

- vii.
- viii.  $f(x)=|\ln x|-2$
- ix.  $f(x)=2+\eta\mu x$

8. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων και μετά, από αυτές να βρείτε το πεδίο τιμών τους:

- i.  $f(x)=3x-2$ ,
- ii.  $f(x)=4x-3$ , με  $A=[2,3]$
- iii.  $f(x)=4-2x$ , με  $A=(-1,2]$
- iv.  $f(x)=e^x$ , με  $x \in (0,4]$
- v.  $f(x)=3x-1$ , με  $x \geq 2$
- vi.  $f(x)=5-2x$ , με  $x < 7$ .

x.  $f(x)=|x+3|-3|x-2|$ .

$$f(x) = \frac{1}{|x|}$$



xii.  $f(x)=|x|+|x-3|$ .

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{αν } 1 \leq x < 2 \\ 2x-3, & \text{αν } -\frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

xiv.

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{αν } x \geq 1 \\ x^2, & \text{αν } -1 \leq x < 1 \\ -x+2, & \text{αν } x < -1 \end{cases}$$

xv.

vii.  $f(x) = \frac{|x-3|}{3-x} - 2x$

viii.  $f(x)=|x^2-5x+6|$ .

ix.  $f(x) = \begin{cases} -x+4, & \text{αν } x \leq 2 \\ 3x-1, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & \text{αν } x \neq 3 \\ 4, & \text{αν } x = 3 \end{cases}$$

9. Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , τέτοια ώστε  $f(x+y)=f(x)+f(y)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι:

- α)  $f(0)=0$
- β) η  $f$  είναι περιττή

10. Δίνεται η μη σταθερή συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , τέτοια ώστε  $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ , για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι:

- α)  $f(0)=1$
- β) η  $f$  είναι άρτια.

11. Να βρείτε συνάρτηση  $f$ , τέτοια ώστε  $f(x) + 2f(1/x) = x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$ .

12. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ίσες. Στην περίπτωση που δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, αλλά έχουν ίδιο τύπο, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ , στο οποίο είναι  $f(x)=g(x)$ :

i.  $f(x)=\frac{x^2+2|x|}{x^2-4}$  και  $g(x)=\frac{|x|}{|x|-2}$

ii.  $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$  και  $g(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$

iii.  $f(x)=\ln(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$  και  $g(x)=-\ln(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$

iv.  $f(x)=\sqrt{x(x-1)}$  και  $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$



13. Να βρεθούν οι συναρτήσεις  $f+g$ ,  $fg$  και  $f/g$ , όταν:

i.  $f(x)=\frac{-3x+2}{x-4}$  και  $g(x)=\frac{x^2+3}{x-5}$

ii.  $f(x)=\sqrt{9-x^2}$  και  $g(x)=\sqrt{x}$

iii.  $f(x)=e^x$  και  $g(x)=e^{-x}$

iv.  $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{αν } x \leq 2 \\ 3x+2, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$  και

$$g(x) = \begin{cases} 2x-3, & \text{αν } x \leq -1 \\ 4-7x, & \text{αν } x > -1 \end{cases}$$

v.  $f(x)=\frac{x^2+1}{x^3-1}$  και  $g(x)=\frac{x^2+x+1}{1-x}$

vi.  $f(x)=\frac{1}{|x+2|-1}$  και  $g(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$

vii.  $f(x)=\sqrt{x+1}$  και  $g(x)=\sqrt{x^2+x}$

viii.  $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$  και  $g(x)=\frac{x+2}{x-2}$

ix.  $f(x)=\sqrt{4-x^2}$  και  $g(x)=\sqrt{x^2-4}$