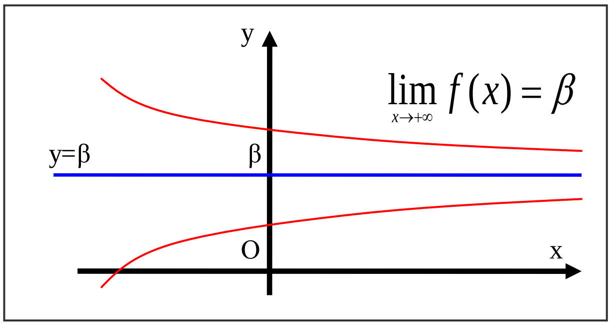
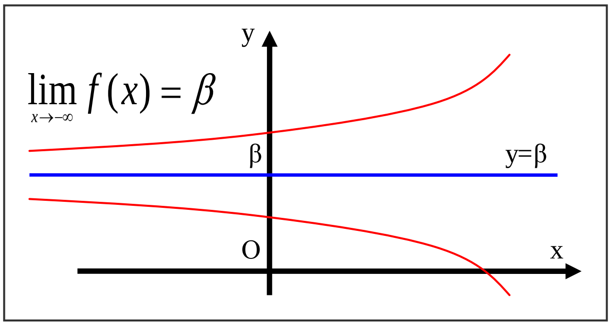
ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

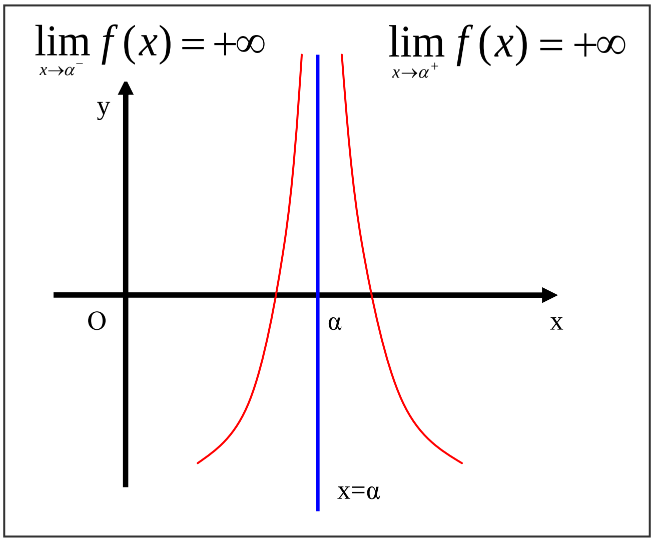
1) Η ευθεία y=β λέγεται οριζόντια ασύμπτωτος της C_f αν $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\beta$ ή $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\beta$.

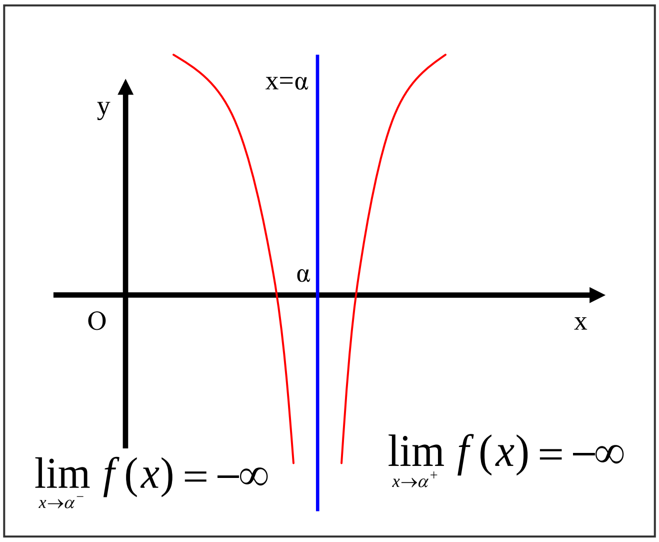




2) Η ευθεία x=α λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτος της C_f αν

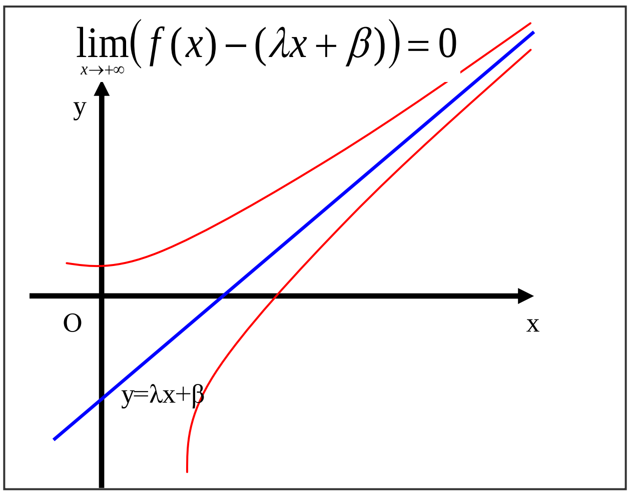
$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x)=\pm\infty \text{ ή } \lim_{x\to\alpha^-} f(x)=\pm\infty.$$

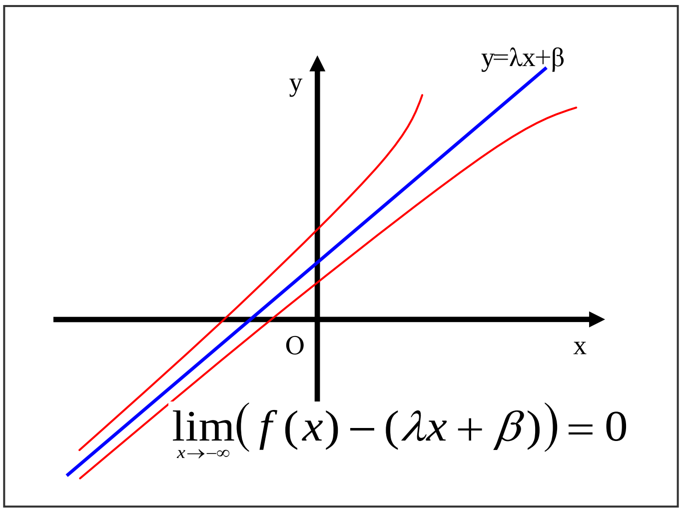




3) Η ευθεία y=λx+β λέγεται πλάγια ασύμπτωτος της C_f αν

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(\lambda x+\beta)\big)=0 \text{ ή } \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-(\lambda x+\beta)\big)=0.$$





4) Για να δείξουμε ότι η ευθεία y=λx+β είναι πλάγια ασύμπτωτος της C_f υπολογίζουμε το όριο της διαφοράς f(x)-(λx+β) όταν $x\to+\infty$ ή $x\to-\infty$ και πρέπει κάποιο από αυτά τα όρια να είναι μηδέν,

5) Όταν μας δίνουν μια συνάρτηση, για να βρούμε την πλάγια ασύμπτωτο:

α) υπολογίζουμε το $\lambda = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, λ∈R,

β) υπολογίζουμε το $\beta = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - \lambda x]$, β∈R οπότε έχουμε προσδιορίσει την y=λx+β,

6) δεν θα βρίσκουμε ταυτόχρονα τα όρια όταν x→±∞ παρά μόνο αν είμαστε σίγουροι ότι τα όρια είναι ίσα, γιατί πολλές φορές είναι διαφορετικά (Άσκηση 1, 2i),

7) εάν λ=0, τότε η πλάγια ασύμπτωτος είναι οριζόντια. Έτσι υπολογίζοντας τις πλάγιες ασύμπτωτες, μας προκύπτουν και οι οριζόντιες αν υπάρχουν. Αν λ ή β=±∞, δεν υπάρχουν πλάγιες ασύμπτωτες,

8) αν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτος στο +∞ (ή -∞), δεν υπάρχει πλάγια στο +∞ (ή -∞ αντίστοιχα), (άσκηση 2ii, 2iv)

9) οι πολυωνυμικές συναρτήσεις δεν έχουν ασύμπτωτες, γιατί $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ και $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$,

10) έστω $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$,Q(x)≠0 ρητή συνάρτηση .

a) Όταν ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρονομαστή, η ευθεία y=0 (άξονας x΄Ox) είναι οριζόντια ασύμπτωτος,

b) Όταν ο βαθμός του αριθμητή είναι ίσος με τον βαθμό του παρονομαστή, η ευθεία $y = \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$, όπου α_ν, β_ν οι είναι οι συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων των P(x) και Q(x) αντίστοιχα, είναι οριζόντια ασύμπτωτος,

c) Όταν ο βαθμός του αριθμητή είναι κατά 1 μονάδα μεγαλύτερος από τον βαθμό του παρονομαστή, τότε υπάρχουν πλάγιες ασύμπτωτες,

d) Όταν ο βαθμός του αριθμητή είναι κατά 2 και πλέον μονάδες μεγαλύτερος από τον βαθμό του παρονομαστή, τότε δεν υπάρχουν πλάγιες ασύμπτωτες,

e) έχει κατακόρυφη ασύμπτωτο την $x=x_0$, μόνο αν το x_0 είναι ρίζα του Q(x) και όχι ρίζα του P(x),

11) η συνάρτηση $f(x)=\log_\alpha P(x)$, έχει κατακόρυφη ασύμπτωτο την $x=x_0$, όπου x_0 είναι (αν υπάρχει) ρίζα του P(x), γιατί $\lim_{P(x)\to 0^+} \log_a P(x) = \pm\infty$. π.χ. η f(x)=lnx έχει κατακόρυφη ασύμπτωτο την x=0 γιατί $\lim_{x\to 0^+}(\ln x) = -\infty$,

12) η συνάρτηση $f(x)=\alpha^{P(x)}$, έχει οριζόντια ασύμπτωτο την ευθεία $y=y_0$, αν $\lim_{x\to\pm\infty} a^{P(x)} = y_0$, π.χ. η $f(x)=e^x$ έχει οριζόντια ασύμπτωτο x=0 γιατί $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$,

13) η f(x)=εφP(x) έχει κατακόρυφες ασύμπτωτους τις ρίζες (αν έχει) της εξίσωσης P(x)=κπ±π/2, κ∈Z,

14) η f(x)=σφP(x) έχει κατακόρυφες ασύμπτωτους τις ρίζες (αν έχει) της εξίσωσης P(x)=κπ, κ∈Z.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x+1}}$.

2) Να βρείτε τις ασύμπτωτες των συναρτήσεων:

i) $h(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{\sqrt{x^2+1}}$,

ii) $\phi(x)=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$,

iii) $\sigma(x)=\ln(x^3-3x^2+4)$

iv) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu x}{x^2}, & x<0\\ \dfrac{3x^2+1}{x}, & x>0\end{cases}$

3) Να υπολογίσετε τα α, β∈R ώστε η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{ax^2+\beta x+1}{x+1}$, να έχει πλάγια ασύμπτωτο στο +∞ την ευθεία y=x-2 . Στην συνέχεια να βρεθούν οι άλλες ασύμπτωτες.