Απόλυτες Τιμές

Όταν θέλουμε να γράψουμε μια παράσταση χωρίς τις απόλυτες τιμές της, εξετάζουμε σε ποιο διάστημα η παράσταση μέσα σε αυτές είναι μη αρνητική ή αρνητική.
Χρησιμοποιούμε ένα πολλαπλό τύπο για να δώσουμε συγκεντρωτικά τους τύπους που παίρνει η παράσταση.

με τη γνωστή μέθοδο απαλοιφής απόλυτων τιμών

Αν μια εξίσωση (ή ανίσωση) περιέχει μόνο μια συγκεκριμένη παράσταση μέσα στις απόλυτες τιμές της και δεν υπάρχει πουθενά αλλού μεταβλητή εκτός των απόλυτων τιμών, τότε εργαζόμαστε σαν η απόλυτη τιμή να είναι ο άγνωστος της εξίσωσης. Μπορούμε μάλιστα αν θέλουμε να θέσουμε στη θεση της απόλυτης τιμής μια καινούρια μεταβλητή. Δουλεύοντας την εξίσωση, θα καταληξουμε σε μια βασικη μορφη εξισωσης.

Αν μια εξίσωση (ή ανίσωση) περιέχει μια παράσταση μέσα σε απόλυτη τιμή, αλλά και μεταβλητή εκτός της απόλυτης τιμής τότε είναι αναγκαίο να απαλείψουμε την απόλυτη τιμή.

Αν μια εξίσωση περιέχει περισσότερες από μια παραστάσεις μέσα στις απόλυτες τιμές της, τότε είναι αναγκαίο να απαλείψουμε τις απόλυτες τιμές με τη βοήθεια ενός πίνακα προσήμων των παραστάσεων αυτών.

Μεθοδολογία για την επίλυση σύνθετων εξισώσεων (ή ανισώσεων)

Απλοποίηση

Βασική Διαπίστωση

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

Βασικές Μορφές Εξισώσεων (όπου Α, Β παραστάσεις)

- Αν θ>0: $|A|=\theta \Leftrightarrow A=\theta$ ή $A=-\theta$
- $|A|=0 \Leftrightarrow A=0$
- Αν α<0: $|A|=\alpha$ η εξίσωση είναι αδύνατη
- $|A|=|B| \Leftrightarrow A=B$ ή $A=-B$

Ιδιότητες

- $|\alpha| \geq 0$ — που σημαίνει ότι: Η απόλυτη τιμή μιας παράστασης είναι πάντα μη αρνητική
- $|\alpha|=|-\alpha|$ — άρα: Μπορώ να εμφανίσω ή να εξαφανίσω το μείον μπροστά από μια παράσταση που βρίσκεται μέσα σε απόλυτη τιμή
- $|\alpha|^2=\alpha^2$ — άρα: Μπορώ να εμφανίσω ή να εξαφανίσω μια απόλυτη τιμή σε παράσταση που υψώνεται στο τετράγωνο (ή σε οποιαδήποτε άλλη άρτια δύναμη)
- $|\alpha| \geq \alpha$
- $|\alpha| \geq -\alpha$

Ανισώσεις

- Αν θ>0, τότε: $|x|<\theta \Leftrightarrow -\theta<x<\theta$ — παράδειγμα: $|3x-5| \leq 7 \Leftrightarrow -7 \leq 3x-5 \leq 7$
- Αν θ>0, τότε: $|x|>\theta \Leftrightarrow x<-\theta$ ή $x>\theta$ — παράδειγμα: $|1+4x|>2 \Leftrightarrow 1+4x<-2$ ή $1+4x>2$
- $\big||\alpha|-|\beta|\big| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha|+|\beta|$ — παράδειγμα: Αν $|x| \leq 3$ και $|y| \leq \frac{1}{2}$ τότε $\left|x \cdot \frac{y}{2}\right| \leq |x|+\left|\frac{y}{2}\right| = |x|+\frac{1}{2}|y| \leq 3+\frac{1}{2} \cdot 2 = 4$

Απόσταση

Η απόσταση d των αριθμών α και β επάνω στον άξονα είναι: $d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|$

Ιδιότητες που βοηθούν στην επίλυση εξισώσεων

- Αν θ>0, τότε: $|x|=\theta \Leftrightarrow x=\theta$ ή $x=-\theta$
  - παραδείγματα:
    - Αν $|x-11|=3$ τότε: $x-11=3$ ή $x-11=-3$
    - Αν $|2x-3|=0$ τότε: $2x-3=0$
    - Αν $|7-3x|=-4$ τότε: η εξίσωση είναι αδύνατη — γιατί
- $|x|=|\alpha| \Leftrightarrow x=\alpha$ ή $x=-\alpha$
  - παράδειγμα: Αν $|2x-4|=|3+5x|$ τότε: $2x-4=3+5x$ ή $2x-4=-(3+5x)$ — τώρα η εξίσωση παίρνει τη μορφή
- $|\alpha \cdot \beta|=|\alpha| \cdot |\beta|$ — $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}$
  - παράδειγμα: $2|x-8|=|7+6x| \Leftrightarrow 2\|x-8|=|7+6x| \Leftrightarrow |2(x-8)|=|7+6x|$

Κώστας Ράπτης, μαθηματικός